Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

**«Пермский национальный** **исследовательский политехнический университет»**

Факультет: Прикладной математики и механики

Кафедра: Вычислительной математики, механики и биомеханики

Направление: 09.04.02 Информационные технологии и системная инженерия

Профиль: «Информационные технологии и системная инженерия»

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

по дисциплине

**«Математическое моделирование и 3D-визуализация сложных систем»**

**Выполнил**

студент гр. ИТСИ-24-1м

**Слаутин Максим Егорович**

**Принял** Преподаватель кафедры ВММБ

**Онискив Владимир Дмитриевич**

**Пермь 2025**

Содержание

[Лабораторная работа №1 3](#_Toc198494489)

[Задание 3](#_Toc198494490)

[Теория 3](#_Toc198494491)

[Результат 4](#_Toc198494492)

[Вывод 4](#_Toc198494493)

[Лабораторная работа №2 4](#_Toc198494494)

[Задание 4](#_Toc198494495)

[Теория 4](#_Toc198494496)

[Результат 5](#_Toc198494497)

[Вывод 6](#_Toc198494498)

[Лабораторная работа №3 6](#_Toc198494499)

[Задание 6](#_Toc198494500)

[Теория 6](#_Toc198494501)

[Результат 7](#_Toc198494502)

[Вывод 7](#_Toc198494503)

[Лабораторная работа №4 7](#_Toc198494504)

[Задание 7](#_Toc198494505)

[Теория 8](#_Toc198494506)

[Результат 9](#_Toc198494507)

[Вывод 9](#_Toc198494508)

[Лабораторная работа №5 9](#_Toc198494509)

[Задание 9](#_Toc198494510)

[Теория 10](#_Toc198494511)

[Результат 11](#_Toc198494512)

[Вывод 11](#_Toc198494513)

[Лабораторная работа №6 12](#_Toc198494514)

[Задание 12](#_Toc198494515)

[Теория 12](#_Toc198494516)

[Результат 13](#_Toc198494517)

[Вывод 14](#_Toc198494518)

Лабораторная работа №1

Задание

Дано пространство: D = [0,10] × [0,10] × [0,10], а также набор функций, которые описываются следующими уравнениями:

1)

2)

3)

4)

Необходимо найти наиболее оптимальное решение, используя алгоритм Поиска с возвратом. Для решения была выбрана первая формула.

Теория

**Поиск с возвратом** — это метод решения задач, который заключается в последовательном переборе возможных вариантов с возвратом к предыдущим шагам, если текущий путь не приводит к решению. Этот подход полезен для задач, где нужно найти все возможные комбинации, удовлетворяющие заданным условиям. Поиск с возвратом работает по следующим пунктам:

**Пошаговое построение решения:** алгоритм начинает с пустого решения и на каждом шаге добавляет новый элемент, расширяя текущий вариант.

**Проверка допустимости:** после каждого добавления проверяется, удовлетворяет ли текущая частичная конфигурация условиям задачи. Если нет — алгоритм отказывается от этого пути.

**Возврат:** если дальнейшее развитие текущего варианта невозможно, алгоритм возвращается на предыдущий шаг и пробует альтернативные варианты.

**Завершение:** процесс продолжается, пока не будут найдены все возможные решения или пока не будет доказана их невозможность.

Результат

|  |
| --- |
| Стартовая точка: Point(0, 4, 9), её значение: 235  Промежуточная точка 0: Point(0, 4, 9), её значение: 235  Промежуточная точка 1: Point(0, 4, 9), её значение: 235  Промежуточная точка 2: Point(0, 4.0005543046303425, 8.999968390570642), её значение: 235.00107730708496  Промежуточная точка 3: Point(0, 4.0005543046303425, 8.999968390570642), её значение: 235.00107730708496  Промежуточная точка 4: Point(0, 4.0005152359016884, 9.000611981482544), её значение: 235.00164271875394 …  Промежуточная точка 99999: Point(0, 10, 10), её значение: 284  Конечная точка: Point(0, 10, 10), её значение: 284  Point(0, 10, 10) |

Вывод

В ходе выполнения работы был реализован метод Поиска с возвратом, который проводит 100.000 попыток нахождения лучшей точки для решения выбранного уравнения.

Лабораторная работа №2

Задание

Имеются следующие координаты точек:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| X | 1 | 3 | 5 | 4 | 3 | 8 | 9 | 6 | 6 | 9 |
| Y | 1 | 7 | 2 | 5 | 3 | 4 | 1 | 8 | 4 | 7 |

Для выбранных точек построить оптимальный маршрут, в котором стартовой точкой является точка 1, а конечной точкой будет являться 10. В качестве результатов исследования получить оптимальную траекторию и длину траектории для 3 разных θ (тета)

Теория

Алгоритм имитации отжига — это вероятностный метод оптимизации, вдохновленный процессом отжига металлов. Он позволяет избегать застревания в локальных минимумах, постепенно уменьшая вероятность принятия худших решений. Основные этапы алгоритма:

**Инициализация:** задается начальный маршрут. Вычисляется его длина.

**Генерация нового решения:** производится случайная перестановка двух точек в маршруте. Вычисляется новая длина пути.

**Критерий принятия решения:** если новый маршрут короче, он принимается. Если длиннее, он может быть принят с подсчитанной вероятностью

**Охлаждение (уменьшение θ):** с течением итераций θ уменьшается, снижая вероятность принятия худших решений.

**Остановка:** алгоритм завершается после достижения заданного числа итераций или стабилизации результата.

Результат

|  |
| --- |
| Исходный маршрут:  Сумма: 51.227776731883786, точки: [Point #1 (1, 1), Point #2 (3, 7), Point #3 (5, 2), Point #4 (4, 5), Point #5 (3, 3), Point #6 (8, 4), Point #7 (9, 1), Point #8 (6, 8), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 49.959709113136306, точки: [Point #1 (1, 1), Point #2 (3, 7), Point #3 (5, 2), Point #4 (4, 5), Point #5 (3, 3), Point #8 (6, 8), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 51.97363315653524, точки: [Point #1 (1, 1), Point #8 (6, 8), Point #3 (5, 2), Point #4 (4, 5), Point #5 (3, 3), Point #2 (3, 7), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 42.88480141957296, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #3 (5, 2), Point #4 (4, 5), Point #8 (6, 8), Point #2 (3, 7), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 42.88480141957296, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #3 (5, 2), Point #4 (4, 5), Point #8 (6, 8), Point #2 (3, 7), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 42.567465784132665, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #3 (5, 2), Point #7 (9, 1), Point #8 (6, 8), Point #2 (3, 7), Point #4 (4, 5), Point #6 (8, 4), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 42.567465784132665, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #3 (5, 2), Point #7 (9, 1), Point #8 (6, 8), Point #2 (3, 7), Point #4 (4, 5), Point #6 (8, 4), Point #9 (6, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 39.600065109063884, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #3 (5, 2), Point #7 (9, 1), Point #8 (6, 8), Point #2 (3, 7), Point #4 (4, 5), Point #9 (6, 4), Point #6 (8, 4), Point #10 (9, 7)]  …  Сумма: 37.14656966336835, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #4 (4, 5), Point #2 (3, 7), Point #8 (6, 8), Point #9 (6, 4), Point #3 (5, 2), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #10 (9, 7)]  Сумма: 37.14656966336835, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #4 (4, 5), Point #2 (3, 7), Point #8 (6, 8), Point #9 (6, 4), Point #3 (5, 2), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #10 (9, 7)]  Лучший маршрут: 1, 5, 4, 2, 8, 9, 3, 7, 6, 10  Сумма: 37.14656966336835, точки: [Point #1 (1, 1), Point #5 (3, 3), Point #4 (4, 5), Point #2 (3, 7), Point #8 (6, 8), Point #9 (6, 4), Point #3 (5, 2), Point #7 (9, 1), Point #6 (8, 4), Point #10 (9, 7)]  Лучшее значение тета = 74 среди: [50, 63, 74] |

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была написана программа, которая случайным образом меняет две точки маршрута и сравнивает результаты, с предыдущими значением, а после принимает решение о выборе нового маршрута в качестве текущего.

Лабораторная работа №3

Задание

Оптимальное заполнение одномерного ранца (Метод Отжига)

10 предметов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Z | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| W | 4 | 6 | 2 | 8 | 9 | 1 | 3 | 5 | 4 | 3 |
| C | 5.0 | 4.5 | 6.0 | 4.0 | 3.5 | 7.0 | 4.0 | 3.0 | 6.5 | 5.5 |

=32 кг из чего следует, что , где = {0;1} (есть или нет), а

Из заданного набора предметов Z каждый имеет свой вес W и ценность C. Рюкзак наполняется, так чтобы общая ценность была максимальной, а вес килограммов.

Теория

**Метод отжига** — это вероятностный алгоритм оптимизации, для поиска глобального оптимума в задачах, где возможны множественные локальные экстремумы. Метод начинает с высокой «температуры», позволяя системе принимать как улучшающие, так и ухудшающие решения, затем постепенно «остывает», снижая вероятность принятия плохих вариантов. **Основные этапы работы:**

**Генерация начального решения**.

**Итеративное улучшение:** соседние решения создаются небольшими изменениями текущего. Лучшие решения принимаются всегда, худшие — с вероятностью, зависящей от температуры и степени ухудшения.

**Схема охлаждения:** температура снижается по заданному правилу.

Результат

|  |
| --- |
| Максимальная ценность: 152.50  Вес набора: 31  Оптимальный набор x: [1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1] |

Вывод

В ходе выполнения работы был реализован метод Отжига, благодаря которому нашлись наилучшие значения для максимизации выгоды с учетом весов каждого предмета.

Лабораторная работа №4

Задание

Выполнить 5 видов селекций, а именно:

1. Рулеточная (14 в 14)
2. Стохастическая универсальная (14 в 14)
3. Ранжированная селекция
4. Селекция усечения (14 в x при L=0.4)
5. Турнирный отбор (14 в 10)

Для написанных данных:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 4.0 | 3.3 | 9.0 | 5.0 | 2.0 | 8.0 | 2.1 | 12.0 | 7.1 | 4.6 | 5.8 | 9.1 | 1.3 | 8.2 |

Теория

**Селекция** — это процесс выбора лучших особей (решений) в популяции для дальнейшего размножения или использования в алгоритмах оптимизации (например, генетических алгоритмах). Применяется в **искусственном интеллекте, машинном обучении, биологии, сельском хозяйстве** и других областях. Рассматриваемые 5 видов селекции:

**Рулеточная:**

Особи выбираются с вероятностью, пропорциональной их приспособленности. Чем выше качество особи, тем больше шансов быть выбранной.

**Стохастическая универсальная:**

Улучшенная рулеточная селекция: выбирается несколько особей за один "прогон" колеса рулетки, что уменьшает случайность и ускоряет сходимость.

**Ранжированная:**

Особи сортируются по приспособленности, и вероятность выбора зависит от их ранга, а не от абсолютного значения. Уменьшает влияние сверхуспешных особей.

**Селекция усечения:**

Отбираются только лучшие особи (например, топ-40% популяции), остальные отбрасываются. Просто и эффективно, но снижает разнообразие.

**Турнирный отбор:**

Случайно выбирается несколько особей (например, 2-3), и среди них отбирается лучшая. Позволяет балансировать между давлением отбора и разнообразием.

Каждый метод имеет свои преимущества и применяется в зависимости от задачи.

Результат

|  |
| --- |
| Вероятность фитнес от общей суммы  [0.049079754601226995, 0.040490797546012265, 0.11042944785276074, 0.06134969325153374, 0.024539877300613498, 0.09815950920245399, 0.025766871165644172, 0.147239263803681, 0.08711656441717791, 0.056441717791411036, 0.07116564417177913, 0.1116564417177914, 0.015950920245398775, 0.10061349693251533]  Рулетка  [14, 6, 10, 10, 4, 8, 9, 8, 7, 12, 9, 5, 8, 11]  Стохастическая универсальная  [6, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 3, 3, 4]  Ранжированная селекция  Ранги:  [5, 4, 12, 7, 2, 10, 3, 14, 9, 6, 8, 13, 1, 11]  Выбор:  [12, 14, 3, 14, 9, 13, 3, 8, 11, 10, 14, 14, 12, 4]  Селекция усечения  [8, 12, 3, 14, 6, 9]  Турнирный отбор (бинарный)  [11, 8, 8, 9, 12, 12, 7, 8, 7, 6] |

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были реализованы все 5 метод селекций, которые хорошо отработали и по результатам видно, что значение фитнес-функции сильно влияет на выбор значений, однако даже у маленьких значений имеются хорошие шансы для выпадения в определённых выборках.

Лабораторная работа №5

Задание

Реализовать генетическийалгоритм, направленный на поиск такого набора чисел из 4 чисел при котором линейная функция:

F = a + 3\*b + 5\*c + 7\*d = 42

Основные этапы задачи:

1. Сгенерировать начальную популяцию случайных решений (начальная популяция равна 100).
2. Оценить пригодность каждой строки по расстоянию до целевого значения.
3. Выбрать пары решений пропорционально их пригодности (чем ближе к цели, тем выше шанс).
4. Создать новое поколение с помощью кроссовера — случайного смешивания частей двух родителей.
5. Применить мутацию к менее успешным решениям.
6. Повторять процесс до тех пор, пока не будет найдено точное решение, при котором F = 42.

Теория

**Генетический алгоритм** — это эвристический метод оптимизации и поиска решений, основанный на принципах естественного отбора и генетики. Он имитирует эволюцию популяции особей (решений), постепенно улучшая их качество. **Основные этапы ГА:**

**Инициализация популяции:**

Создается начальный набор случайных решений (хромосом).

**Оценка приспособленности (Фитнесс-функция):**

Каждая особь оценивается по функции приспособленности (например, чем лучше решение, тем выше значение).

**Селекция (отбор):**

Выбираются лучшие особи для размножения (например, рулеточная, турнирная селекция).

**Кроссовер (скрещивание):**

Родительские особи обмениваются частями своих хромосом, создавая потомков.

**Мутация:**

Случайные изменения в генах потомков (для поддержания разнообразия).

**Формирование новой популяции:**

Лучшие особи (родители и потомки) переходят в следующее поколение.

**Проверка условия остановки:**

Алгоритм завершается при достижении максимума поколений, нужного качества решения и т. д.

Результат

|  |
| --- |
| Изначальный массив:  1: [31, 21, 40, 18]  2: [28, 9, 32, 10]  3: [40, 14, 14, 33]  …  98: [28, 1, 3, 31]  99: [23, 19, 18, 7]  100: [4, 30, 19, 9]  1 итерация  Среднее расстояние было: 312.34  Среднее расстояние стало: 261.32  2 итерация  Среднее расстояние было: 261.32  Среднее расстояние стало: 203.19  3 итерация  Среднее расстояние было: 203.19  Среднее расстояние стало: 128.59  4 итерация  Среднее расстояние было: 128.59  Среднее расстояние стало: 78.27  5 итерация  Среднее расстояние было: 78.27  Среднее расстояние стало: 46.91  6 итерация  Среднее расстояние было: 46.91  Среднее расстояние стало: 19.49  Решение в строке 61: [11, 4, 1, 2] |

Вывод

В ходе выполнения алгоритма был написан метод мутации для вещественных чисел (в разработанном случае число были использованы только целые числа 1 и -1) с изменением рандомного значения в строке, только для тех строк, в которых дистанция была больше среднего значения. Благодаря такому решению необходимые значения для решения функции F были найдены быстрее. Также в выводе программы видно, что с большой скоростью среднее расстояние приближалось к необходимому значению F=42.

Лабораторная работа №6

Задание

С помощью алгоритма роя частиц найти экстремум , где . Число итераций равно 10, а рой равен 5.

Алгоритм**:**

1. Случайная генерация на квадрате с ограничением скорости в 0.5;
2. Вычисление ;
3. Вычисление α и β;
4. Вычисляем новые ;
5. Вычисляем новые ;
6. Либо финиш (все частицы достигли ) либо по новой с пункта 3.

Теория

Основная идея заключается в том, что множество простых агентов, взаимодействующих по определенным правилам, способны совместно решать сложные задачи. Каждый агент обладает минимальной индивидуальной интеллектуальностью, но за счет обмена информацией и самоорганизации вся система демонстрирует разумное поведение.

Одним из самых известных алгоритмов роевого интеллекта является **оптимизация роем частиц**, имитирующая поведение стаи птиц. В этом методе виртуальные частицы движутся в пространстве решений, запоминая свои лучшие позиции и корректируя траекторию на основе опыта всей группы. Такой подход эффективен для поиска глобального оптимума в сложных задачах.

Роевой интеллект находит применение в самых разных областях. В робототехнике он используется для координации групп дронов, в логистике — для оптимизации маршрутов, в финансах — для анализа рынков, а в медицине — для обработки медицинских данных. Главные преимущества таких алгоритмов — это гибкость, масштабируемость и устойчивость к отказам отдельных агентов.

Результат

|  |
| --- |
| Изначальные значения:  1-я частица:  Позиция: [x=11.337, y=0.992]  Скорость: [vx=0.408, vy=-0.090]  Значение F: -3.210  2-я частица:  Позиция: [x=10.161, y=3.528]  Скорость: [vx=-0.164, vy=0.409]  Значение F: -1.657  3-я частица:  Позиция: [x=2.903, y=8.837]  Скорость: [vx=-0.048, vy=0.305]  Значение F: -1.380  4-я частица:  Позиция: [x=10.522, y=9.003]  Скорость: [vx=-0.224, vy=-0.405]  Значение F: -2.092  5-я частица:  Позиция: [x=1.099, y=4.401]  Скорость: [vx=-0.426, vy=0.062]  Значение F: -3.419  Начальные лучшие значения:  Глобальный лучший: F=-3.419 при [x=1.099, y=4.401]  --- Итерация 1 ---  Текущие позиции:  Частица 1: [x=11.745, y=0.902] F=-2.482, [Vx=-0.500, Vy=0.500]  Частица 2: [x=9.661, y=4.028] F=-1.688, [Vx=-0.500, Vy=0.500]  Частица 3: [x=2.403, y=8.337] F=-2.592, [Vx=-0.500, Vy=-0.500]  Частица 4: [x=10.022, y=8.503] F=-2.152, [Vx=-0.500, Vy=-0.500]  Частица 5: [x=0.673, y=4.463] F=-2.693, [Vx=0.000, Vy=-0.000]  Лучшие локальные значения:  Частица 1: F=-3.210 при [x=11.337, y=0.992]  Частица 2: F=-1.688 при [x=9.661, y=4.028]  Частица 3: F=-2.592 при [x=2.403, y=8.337]  Частица 4: F=-2.152 при [x=10.022, y=8.503]  Частица 5: F=-3.419 при [x=1.099, y=4.401]  Глобальный лучший: F=-3.419 при [x=1.099, y=4.401]  --- Итерация 2 ---  …  --- Итерация 3 ---  …  --- Итерация 10 ---  Текущие позиции:  Частица 1: [x=10.946, y=1.246] F=-3.792, [Vx=0.302, Vy=0.500]  Частица 2: [x=11.246, y=1.504] F=-3.869, [Vx=-0.452, Vy=-0.499]  Частица 3: [x=5.403, y=5.609] F=-2.216, [Vx=0.500, Vy=-0.500]  Частица 4: [x=10.770, y=5.228] F=-3.426, [Vx=-0.013, Vy=-0.500]  Частица 5: [x=3.830, y=2.979] F=-1.440, [Vx=0.500, Vy=-0.500]  Лучшие локальные значения:  Частица 1: F=-3.824 при [x=11.245, y=1.402]  Частица 2: F=-3.991 при [x=11.008, y=1.504]  Частица 3: F=-2.592 при [x=2.403, y=8.337]  Частица 4: F=-3.762 при [x=11.022, y=7.503]  Частица 5: F=-3.419 при [x=1.099, y=4.401]  Глобальный лучший: F=-3.991 при [x=11.008, y=1.504]  Финальные результаты:  Лучшее найденное решение: F=-3.991  При координатах: [x=11.008, y=1.504] |

Вывод

В результате выполнения лабораторной работы за 10 итераций для роя из 5 элементов были найдены близкие к лучшему значению на выбранном квадрате, а также видно динамику того, как все частицы движутся к более лучшим значениям, из чего можно сказать, что с большим количество итераций и числом роя значение будет все больше приближаться к минимальному.